2020-2021 EĞİT.-ÖĞR. YILI MAT101 ANALİZ 1 DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

Adı- Soyadı: 9.02.2021

Numarası:

1) Aşağıda verilen ifadelerin yanlarındaki boşluklara doğru (D) veya yanlış (Y) yazınız.

a) Her $x, y \geq 0$ için $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ olur. D

b) Her $n \geq 1$ için $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ olur. D

c) Her rasyonel sayı bir doğal sayıdır. Y

d) $\mathbb{R}$ kümesinin her alt kümesinin bir supremumu vardır. Y

e) Eğer $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesinin supremumu varsa bu kümenin infimumu da vardır. Y

f) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\sin x + \cos x = 1$ olur. Y

g) Bir f fonksiyonu tanım kümesindeki her noktada sürekli ise düzg~~ün sürek~~lidir. Y

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ Y

i) $f : X \to Y$ fonksiyonunda $x_0 \in X$ bir ayrık nokta ise f fonksiyonu bu x_0 noktasında süreklidir. D

j) $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün süreklidir. Y

2) Aşağıdaki ifadelerde verilen boşlukları doldurunuz.

a) $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere her $a \in A$ için $a \leq b$ oluyorsa b bir üst sınır dir.

b) Monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi yakınsaktır.

c) $\mathbb{R}$ de bir dizi tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan bir fonksiyondur.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\sqrt{2}|}{x-\sqrt{2}}, & x \neq \sqrt{2} \\ 0, & x = \sqrt{2} \end{cases}$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} =$ yoktur

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos 2x =$ yoktur.

3) $A=\left\{(-1)^n\left(\frac{n+4}{n+3}\right)+\frac{n-1}{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right): n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin supremum ve infimum değerlerini bulunuz.

$\mathbb{N}$ – doğal sayılar kümesini $(-1)^n$ ve $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ den dolayı parçalayalım.

(i) $n=2k$ alınırsa $(-1)^{2k}=1$, $\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right)=0$ olup

$$A_1=\left\{\frac{n+4}{n+3} : n=2k\right\}=$$

$$=\left\{\frac{6}{5},\frac{8}{7},\frac{10}{9},\dots,\frac{2k+4}{2k+3}\right\} \text{ için } \sup A_1=\frac{6}{5},\ \inf A_1=1$$

(ii) $n=2k+1$ için $n=1,3,5,7,9,11,\dots$ olmak üzere $n=4k+1 : n=1,5,9,\dots$
$n=4k+3 : n=3,7,11,\dots$ olup

$$A_2=\left\{-\frac{4k+5}{4k+4}+\frac{4k}{4k+2} : k=0,1,2,\dots\right\}$$

$$=\left\{\frac{-12k-10}{16k^2+24k+8} : k=0,1,2,\dots\right\}$$

$$=\left\{\frac{-5}{4},\frac{-22}{48},\dots,\frac{-12k-10}{16k^2+24k+8},\dots\right\} \quad \sup A_2=0,\ \inf A_2=\frac{-5}{4}$$

$$A_3=\left\{-\frac{4k+7}{4k+6}-\frac{4k+2}{4k+4} : k=0,1,\dots\right\} \quad \sup A_3=\frac{-40}{24}$$

$$=\left\{-\frac{(32k^2+76k+40)}{16k^2+40k+24} : k=0,1,\dots\right\} \quad \inf A_3=-2$$

* $A=A_1\cup A_2\cup A_3$ old.dan $\sup A=\frac{6}{5}$, $\inf A=-2$ olur.

4) $a_1 = 1$ olmak üzere (a_n) dizisi $a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 2}{3 + a_n}$ bağıntısıyla veriliyor. Monotonluğu ve sınırlılığını kullanarak (a_n) dizisinin yakınsaklığını bulunuz.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 1$ dir. $a_1 = 1$ olup $a_n \geq 1$ old.da

$$a_{n+1} = \frac{4a_n+2}{a_n+3} = 4 - \frac{10}{a_n+3} \geq 4 - \frac{10}{4} = \frac{3}{2} > 1$$

dir.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n < 2$ dir. $a_1 = 1 < 2$ dir. $a_n < 2$ olduğunda $2a_n < 4 \Rightarrow 2 + 4a_n < 6 + 2a_n \Rightarrow$

$$\frac{2+4a_n}{a_n+3} = a_{n+1} < 2 \text{ olur.}$$

(iii) $$a_{n+1} - a_n = \frac{4a_n+2}{a_n+3} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{3 + a_n} \text{ için}$$

$a_n = x$ alınırsa $\dfrac{2 + x - x^2}{3+x}$, $1 \leq x < 2$ için

$\dfrac{-(x-2)(x+1)}{x+3}$ tablosu

x		-1		2	
	$-$		$+$		$-$

olup

$a_{n+1} - a_n > 0$ dir. Yani (a_n) artandır.

(*) (a_n) artan ve üstten sınırlı old.dan $(a_n) \to \operatorname{Sup}(a_n)$ olup $(a_{n+1}) \subset (a_n)$ old.dan (a_{n+1})-de yakınsaktır. $\operatorname{Sup}(a_n) = L$ alınırsa

$a_{n+1} = \dfrac{4a_n+2}{a_n+3}$ ifadesinin her iki tarafının limiti alınırsa $L = \dfrac{4L+2}{L+3} \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow$

$L = 2 \vee L = -1$ olup $\operatorname{Sup}(a_n) = L = 2$ dir.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$ limitini bulunuz. **(L'hopital kuralını kullanmayınız)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi/2\cos x)}{\sin(\sin x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi/2\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\cdot\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin(\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\cdot\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\underbrace{\pi\cdot\sin^2\frac{x}{2}}_{u}}\cdot\frac{\pi\cdot\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\cdot 4}{\sin(\sin x)\cos^2\frac{x}{2}\cdot 4}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{\pi\cdot\sin x\cdot\sin x}{\sin(\sin x)\cdot 4\cdot\cos^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\cdot\sin x}{4\cos^2\frac{x}{2}}=0$$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x-\sqrt{x}-2}$ limitini bulunuz. **(L'hopital kuralını kullanmayınız)**

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x-\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\frac{4}{3}$$

7) $(b_n)=\dfrac{1-\cos\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}$ dizisinin limitini bulunuz. **(L'hopital kuralını kullanmayınız)**

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}}=\left(\frac{0}{0}\right)\Rightarrow$$

$\frac{1}{n}=t$ alınırsa $n\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$ olup

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(\sin t)}{t\cdot\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2(\sin t)}{t\cdot\sin t\,(1+\cos(\sin t))}=$$

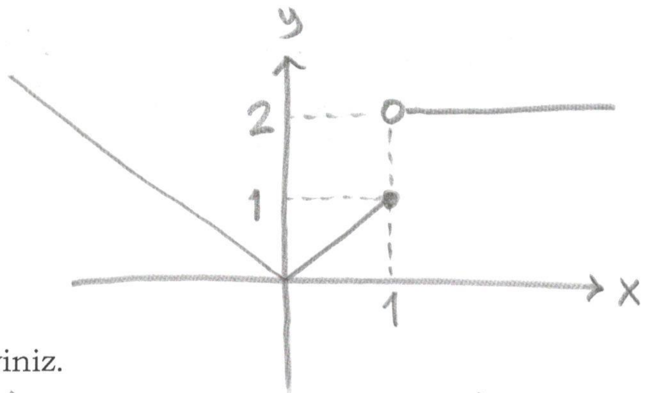
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(\sin t)}{t\cdot\sin t\cdot(1+\cos(\sin t))}=\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\sin^2(\sin t)}^{1}\cdot\overbrace{\sin t}^{1}}{\sin^2 t\cdot(1+\cos(\sin t))\cdot t}=\frac{1}{2}$$

8) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{9-x}=2$ olduğunu $(\varepsilon-\delta)$ yöntemiyle gösteriniz.

$\forall\varepsilon>0$ için $|x-5|<\delta \Rightarrow |\sqrt{9-x}-2|<\varepsilon$ o.ş. $\exists\delta>0$ bulmalıyız. $\varepsilon>0$ için $|x-5|<\delta$ old. da

$$|\sqrt{9-x}-2|=\frac{|9-x-4|}{|\sqrt{9-x}+2|}=\frac{|5-x|}{\sqrt{9-x}+2}<\frac{\delta}{2} \text{ olup}$$

$\delta=2\varepsilon$ alınmalıdır.



9) $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le 1\\ 1+\operatorname{sgn}(x), & x>1\end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

(a) $f(1^+)$, $f(1^-)$ değerlerini bulunuz.

(b) $x=1$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

(c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$ limitini bulunuz.

(a) $f(1^+)=2$, $f(1^-)=1$

(b) $f(1^-)=f(1)=1$ olup $x=1$'de soldan sürekli ama $f(1^-)\neq f(1^+)$ old.dan sonlu sıçramalı süreksizlik noktasıdır.

(c) $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$, $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$ olup bu limit yoktur.